

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	3
2	Folgen und Reihen	3
2.1	Folgen	3
	Arithmetische Folgen	4
	Geometrische Folgen	4
2.2	Reihen	5
	Arithmetische Reihe	5
	Geometrische Reihe	6
3	Zinsrechnung	6
3.1	Zins und Zinseszins	6
3.2	Aufgaben der Zeitrentenrechnung	7
3.2.1	Begriffe	7
3.2.2	Aufzinsung	7
3.2.3	Abzinsung	9
3.2.4	Kapitaltilgung	11
	a) Ratentilgung	11
	b) Annuitätentilgung	12
	c) Vergleich der Tilgungsarten	13
4	Schluss	14
5	Anhang	14

1 Einleitung

Meine Facharbeit behandelt das Thema „Folgen und Reihen am Beispiel der Zinsrechnung“. Die Mathematik spielt im heutigen Leben eine wichtige Rolle und ist Bestandteil vieler wirtschaftlicher oder auch gesellschaftlicher Aktivitäten, wie z.B. der einfache Einkauf im Supermarkt oder das Aufnehmen von Krediten, Hypotheken oder ähnlichen Geldgeschäften. Auf die Zinsrechnung werde ich im Laufe der Facharbeit noch näher eingehen. Schon im 5. Jahrhundert führte der griechische Philosoph Zenon mit folgendem Paradoxon an das Thema der „Folgen und Reihen“ heran: „Achilles, der schnellste Läufer der Antike, will eine uralte Schildkröte fangen, die [mit $\frac{1}{100}$ seiner Geschwindigkeit] hundert Meter vor ihm kriecht.“ [2, S.178] Sobald Achilles seinen Vorsprung von 100 Metern gelaufen ist, ist die Schildkröte bereits um $\frac{1}{100}$ seines Weges, d.h. um 1 Meter weitergelaufen. Hat Achilles auch diesen einen Meter hinter sich gebracht, ist die Schildkröte schon wieder um einen weiteren Zentimeter weitergekrochen. Jedesmal, „wenn Achilles den Vorsprung der Schildkröte zurückgelegt hat, ist diese inzwischen weiter $\frac{1}{100}$ dieses Vorsprungs weitergekrochen. Also wird er sie nie erreichen.“ [2, S.178]

Die Lösung des Problems liegt in der Anwendung von „Folgen und Reihen“.

2 Folgen und Reihen

2.1 Folgen

$$(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) = (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \quad n \in \mathbb{N}; x_n \in \mathbb{R}$$

nennt man Zahlenfolge, wobei der Index den Stellenwert des Gliedes der Folge angibt. x_2 ist somit das 2. Glied der Folge. x_n ist das n-te Glied, oder auch allgemeines Glied genannt. Folgen finden gerne Anwendung in Intelligenztests, in denen man eine Serie von Zahlen vervollständigen soll. Z.B.: 1, 2, 5, 12, 27, 58, ?

Beispiel 2.1.1:

N	1	2	3	4	5	6	...	n
M	1	2	5	12	27	58	...	x_n

Jeder natürlichen Zahl N wird ein Element M zugeordnet: $f : N \rightarrow M$. Man schreibt gewöhnlich: $f(v) = x_n$ wobei $v = (1; 2; 3; \dots; n)$ ist.

Eine Folge kann in verschiedenen Formen dargestellt werden. Man spricht von *expliziter* und *rekursiver* Darstellungsweise.

explizit: Funktionstherm zur Berechnung des n-ten Gliedes x_n mit dem Index n . Für Beispiel 2.1.1 gilt demzufolge: $x_n = 2^n - n$

Um auf den Intelligenztest zurückzugreifen, kann man mit dieser Formel das nächste

Glied x_7 ausrechnen:

$$x_7 = 2^7 - 7 = 121$$

rekursiv: Funktionstherm zur Berechnung eines beliebigen Gliedes n aus dem vorhergehenden Glied $(n - 1)$. Dies kann jedoch nur schrittweise berechnet werden und die benötigten Anfangsglieder müssen bekannt sein. Für Beispiel 2.1.1 gilt demzufolge: $x_n = 2(x_{n-1} + n - 1) - n$. Somit folgt für x_7 :

$$x_7 = 2(x_{n-1} + 7 - 1) - 7 \text{ mit } x_{n-1} = x_6 = 58$$

$$x_7 = 2(58 + 7 - 1) - 7 = 121$$

Arithmetische Folgen sind Folgen, deren Differenz d zweier aufeinander folgender Glieder konstant ist. Das heißt, für jedes n gilt: $x_{n+1} - x_n = d$

Auch hier unterscheidet man wieder zwischen den 2 Darstellungsweisen *explizit* und *rekursiv*.

explizit: $x_n = x_1 + (n - 1)d$

rekursiv: $x_n = x_{n-1} + d$

In beiden Darstellungsweisen müssen jeweils 2 Variablen bekannt sein!

Beispiel 2.1.2:

Folge der ungeraden Zahlen: 1,3,5,7,9,...

explizit: mit $x_1 = 1; d = 2$

$$x_6 = x_1 + (6 - 1)d$$

$$x_6 = x_1 + 5d$$

$$x_6 = 1 + 10 = 11$$

rekursiv: mit $x_5 = 9; d = 2$

$$x_6 = x_5 + d$$

$$x_6 = 9 + 2 = 11$$

Die nächste ungerade Zahl der Folge ist demnach die 11. Solche Art von Folgen sind noch einfach im Kopf zu berechnen, aber sobald schwer durchschaubare Folgen auftreten, helfen die Formeln zu Auflösung beachtlich. Diese Folge wächst echt monoton, da für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt: $x_{n+1} > x_n$. Dann folgt aus $n > m : x_n > x_m$, was ein bedeutendes Monotoniekriterium für Funktionen ist. Somit ist die Folge des Beispiels 2.1.2 nicht nach oben beschränkt. Also gilt: $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty$

„Die Folge x ist nach oben beschränkt, wenn es ein M gibt, sodass $x_n < M$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.“ [2, S.179]

Geometrische Folgen sind Folgen deren Quotient zweier aufeinander folgenden Glieder konstant ist: $\frac{x_{n+1}}{x_n} = q$

Auch hier unterscheidet man wieder zwischen *expliziter* und *rekursiver* Darstellungs-

weise.

explizit: $x_n = x_1 \cdot q^{n-1}$

rekursiv: $x_n = x_{n-1} \cdot q$

Beobachtung im Unendlichen¹:

Für $q > 1$ und $a_1 > 0$ wächst die geometrische Folge x echt monoton und ist nach oben nicht beschränkt, $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty$.

Für $0 < q < 1$ und $a_1 > 0$ fällt die geometrische Folge echt monoton und hat den Grenzwert null, $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$.

Für $q < 0$ wechselt das Vorzeichen von Folgenglied zu Folgenglied, man spricht dann von einer alternierenden Folge.

Beispiel 2.1.3:

Folge der Zweierpotenzen: 2, 4, 8, 16, 32, 64, ...

explizit: mit $x_1 = 2; q = 2$

$$x_n = x_1 \cdot q^{n-1}$$

$$x_7 = x_1 \cdot q^6$$

$$x_7 = 2 \cdot 2^6 = 128$$

rekursiv: mit $x_7 = 128; q = 2$

$$x_n = x_{n-1} \cdot q$$

$$x_8 = x_7 \cdot q = 11$$

$$x_8 = 128 \cdot 2 = 256$$

Somit wird die Folge echt monoton steigend fortgeführt: 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256

2.2 Reihen

Mit Reihen bezeichnet man die Summe der Glieder einer Folge (x_n)

$$s = x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n = \sum_{i=1}^n x_i$$

Die Summe der ersten n Glieder einer Folge nennt man auch n -te Partialsumme. Natürlich gibt es Unterschiede bei der Summierung der Glieder einer arithmetischen und geometrischen Folge. Deswegen unterscheiden wir *arithmetische Reihe* und *geometrische Reihe*:

Arithmetische Reihe ist die Summe der Glieder einer arithmetischen Folge (x_n)
(konstante Differenz zwischen den Gliedern)

$$s_n = x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n = \sum_{i=1}^n x_i = (x_1 + x_n) \cdot \frac{n}{2}$$

unendliche Reihe:

Führt eine Reihe bis ins unendliche ($n = \infty$), kann es sein, dass der Grenzwert dieser Reihe existiert. Ist dies der Fall, gilt: $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \sum_{i=0}^{\infty} x_i$ und wird als die Summe der unendlichen Reihe bezeichnet. Ist die Summe der Reihe endlich, nennt man sie *konvergent*, andernfalls *divergent*.

Beispiel 2.2.1:

Summierung der Folge $(x_n) = (1, 2, 3, \dots, 15)$

$$1 + 2 + 3 + \dots + 15 = \sum_{i=1}^{15} i = \frac{(1+15) \cdot 15}{2} = 120$$

Hierbei handelt es sich um eine konvergente endliche Reihe.

Geometrische Reihe ist die Summe der Glieder einer geometrischen Folge $(b; bq; bq^2; bq^3; \dots; bq^n)$

$$s_m = b + bq + bq^2 + bq^3 + \dots + bq^n = \sum_{i=0}^n bq^i = b \cdot \frac{1-q^{n+1}}{1-q} \text{ mit } q \neq 1$$

Betrachtung der geometrischen Reihe im Unendlichen:

$$|q| > 1 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} |q^n| = b \frac{1-q^n}{1-q} = \infty$$

\Rightarrow keine endliche Summe! \Rightarrow Reihe ist divergent.

$$|q| < 1 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} |q^n| = b \frac{1-q^n}{1-q} = 0$$

\Rightarrow endliche Summe $s_n = b \frac{1}{1-q} \Rightarrow$ Reihe ist konvergent.

Mit Hilfe dieser Formeln der „Folgen und Reihen“ können wir auch leicht das Problem des Zenon mit der Schildkröte lösen:

„Für die ersten 100 Meter braucht Achilles die Zeit a_1 für den folgenden 1 Meter die Zeit $\frac{1}{100}a_1$, der nächste Zentimeter wird in $\frac{1}{10000}a_1$ durchlaufen Die Gesamtzeit t bis zum Einholen der Schildkröte erhält man als Grenzwert der geometrischen Reihe

$$a_1 + \frac{a_1}{100} + \frac{a_1}{100^2} + \dots + \frac{a_1}{100^n} + \dots = a_1 \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{100}} = a_1 \cdot \frac{100}{99}.$$

Nach der Zeit $\frac{100}{99}a_1$ hat Achilles die Schildkröte also doch eingeholt.

3 Zinsrechnung

Ein wichtige Anwendung der Folgen und Reihen ist im Bereich der Zinsrechnung. Zuerst wird der Begriff des Zins und Zinseszins erläutert, um dann auf die Hauptaufgaben der Zeitrentenrechnung zu sprechen zu kommen.

3.1 Zins und Zinseszins

Kapital K wird jährlich mit $p\%$ verzinst, sodass am Ende des 1. Jahres das Kapital auf

$$K_1 = K_0 + K_0 \cdot p\% = K_0 \left(1 + \frac{p}{100}\right)$$

angewachsen ist, wobei $1 + \frac{p}{100}$ als q (Verzinsungsfaktor) definiert ist. Somit wird für das 2. Jahr das Endkapital des ersten Jahres verzinst:

$$K_2 = K_1 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right) = K_1 \cdot q = K_0 \cdot q \cdot q = K_0 q^2$$

Man spricht von Zinseszins, da der Zins des ersten Jahres mitverzinst wurde. Am Ende des 3. Jahres ergibt sich dann:

$$K_3 = K_2 \cdot q = K_0 q^2 \cdot q = K_0 q^3$$

Somit ergibt sich am Ende des n -ten Jahres:

$$K_n = K_0 \cdot q^n \text{ (Zinseszinsformel von LEIBNITZ)}$$

$$K_0 = \text{Barwert}; K_n = \text{Endwert};$$

n = Dauer in Jahren; q = Verzinsungsfaktor ($1 + p\% = 1 + \frac{p}{100}$)

Beispiel 3.1.1:

Ein Kapital zu 2000 Euro wird für 20 Jahre mit einem Zinseszinssatz von 6% angelegt. Wie hoch ist das Kapital nach besagtem Zeitraum?

$$K_{20} = 2000 \cdot 1,06^{20} [\text{Euro}] = 6414,27 [\text{Euro}]$$

3.2 Aufgaben der Zeitrentenrechnung

3.2.1 Begriffe

Aufzinsung: Jährlich werden konstante Beträge (Prämien) eingezahlt, die zusammen mit dem schon vorhandenen Kapital verzinst werden.

Abzinsung: Jährlich werden konstante Beträge (Renten) von einem vorhandenen Kapital ausgezahlt, während das sich vermindernde Kapital solange mit Zinseszins vergütet wird, bis es aufgebraucht ist.

vorschüssige Zahlungsweise: Einzahlung (Prämie) bzw. Auszahlung (Rente) am Anfang des Rechnungsjahres.

nachschüssige Zahlungsweise: Einzahlung (Prämie) bzw. Auszahlung (Rente) am Ende des Rechnungsjahres.

3.2.2 Aufzinsung

In folgender Grafik ist die Übersicht[1, S.195] der Kapitalentwicklung dargestellt. Mit K_0 = Anfangskapital; P = Prämie und q = Verzinsungsfaktor.

vorschüssig

Rechnungsjahr Nr.	Kapital am Anfang	Kapital am Ende
1	$K_0 = P$	$K_1 = Pq$
2	$K_1 + P$	$K_2 = Pq^2 + Pq$
3	$K_2 + P$	$K_3 = Pq^3 + Pq^2 + Pq$
...
n	$K_{n-1} + P$	$K_n = Pq^n + Pq^{n-1} + \dots + Pq$

nachschüssig

Rechnungsjahr Nr.	Kapital am Anfang	Kapital am Ende
1	–	$K_1 = P$
2	K_1	$K_2 = Pq + P$
3	K_2	$K_3 = Pq^2 + Pq + P$
...
n	K_{n-1}	$K_n = Pq^{n-1} + \dots + Pq + P$

Daraus ergeben sich die Grundgleichungen für die Endwerte des Kapitals (K_n):

vorschüssig:

$$\begin{aligned}
 K_n &= Pq^n + Pq^{n-1} + \dots + Pq = \\
 &= P(q^n + q^{n-1} + \dots + q) = \\
 &= P(q + q^2 + \dots + q^n) = \\
 &= Pq(1 + q + q^2 + \dots + q^{n-1}) = \\
 &= Pq \cdot \sum_{i=0}^{n-1} q^i = Pq \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}
 \end{aligned}$$

nachschüssig:

$$\begin{aligned}
 K_n &= Pq^{n-1} + Pq^{n-2} + \dots + P = \\
 &= P(q^{n-1} + q^{n-2} + \dots + q + 1) = \\
 &= P(1 + q + \dots + q^{n-1}) = \\
 &= P \cdot \sum_{i=0}^{n-1} q^i = P \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}
 \end{aligned}$$

Zusammengefasst ergibt sich folgende Übersicht:

vorschüssig

nachschüssig

$$K_n = Pq \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

$$K_n = P \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

Bei der Aufzinsung ist die vorschüssige Zahlungsweise gebräuchlich.

Wird zu einem verzinsten Kapital jährlich eine Prämie dazugelegt, dann ergeben sich folgende Übersichten für die Kapitalentwicklung:

vorschüssig

Rechnungsjahr Nr.	Kapital am Anfang	Kapital am Ende
1	$K_0 + P$	$K_1 = K_0q + Pq$
2	$K_1 + P$	$K_2 = K_0q^2 + Pq^2 + Pq$
3	$K_2 + P$	$K_3 = K_0q^3 + Pq^3 + Pq^2 + Pq$
...
n	$K_{n-1} + P$	$K_n = K_0q^n + Pq^n + Pq^{n-1} + \dots + Pq$

nachschüssig

Rechnungsjahr Nr.	Kapital am Anfang	Kapital am Ende
1	K_0	$K_1 = K_0q + P$
2	K_1	$K_2 = K_0q^2 + Pq + P$
3	K_2	$K_3 = K_0q^3 + Pq^2 + Pq + P$
...
n	K_{n-1}	$K_n = K_0q^n + Pq^{n-1} + \dots + Pq + P$

Zusammengefasst ergibt sich folgende Übersicht:

vorschüssig

nachschüssig

$$K_n = K_0q^n + Pq \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

$$K_n = K_0q^n + P \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

3.2.3 Abzinsung

Bei Rentenauszahlung mit beachtetem Zinseszins kommt es zu folgenden Übersichten[1, S.197] der Kapitalentwicklung:

vorschüssig

Rechnungsjahr Nr.	Kapital am Anfang	Kapital am Ende
1	$K_0 - R$	$K_1 = K_0q - Rq$
2	$K_1 - R$	$K_2 = K_0q^2 - Rq^2 - Rq$
3	$K_2 - R$	$K_3 = K_0q^3 - Rq^3 - Rq^2 - Rq$
...
n	$K_{n-1} - R$	$K_n = K_0q^n - Rq^n - Rq^{n-1} - \dots - Rq$

nachschüssig

Rechnungsjahr Nr.	Kapital am Anfang	Kapital am Ende
1	K_0	$K_1 = K_0q - R$
2	K_1	$K_2 = K_0q^2 - Rq - R$
3	K_2	$K_3 = K_0q^3 - Rq^2 - Rq - R$
...
n	K_{n-1}	$K_n = K_0q^n - Rq^{n-1} - \dots - R$

Daraus ergeben sich die Grundgleichungen für die Endwerte des Kapitals (K_n):

vorschüssig:

$$\begin{aligned}
 K_n &= K_0q^n - Rq^n - Rq^{n-1} - \dots - Rq \\
 &= K_0q^n - R(q^n + q^{n-1} + \dots + q) = \\
 &= K_0q^n - R(q + q^2 + \dots + q^n) = \\
 &= K_0q^n - Rq(1 + q + \dots + q^{n-1}) = \\
 &= K_0q - Rq \cdot \sum_{i=0}^{n-1} q^i = \\
 &= K_0q - Rq \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}
 \end{aligned}$$

nachschüssig:

$$\begin{aligned}
 K_n &= K_0q^n - Rq^{n-1} - Rq^{n-2} - \dots - R = \\
 &= K_0q^n - R(q^{n-1} + q^{n-2} + \dots + 1) = \\
 &= K_0q^n - R(1 + q + \dots + q^{n-1}) = \\
 &= K_0q^n - R \cdot \sum_{i=0}^{n-1} q^i = \\
 &= K_0q^n - R \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}
 \end{aligned}$$

Zusammengefasst ergibt sich folgende Übersicht:

vorschüssignachschüssig

$$K_n = K_0q^n - R \frac{q^n - 1}{q - 1} \cdot q$$

$$K_n = K_0q^n - R \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

Durch die ständige Entnahme der Renten hört der Abbau des Kapitals dann auf, wenn dieses 0 ist ($K_n = 0$):

vorschüssignachschüssig

$$K_0q^n - Rq \frac{q^n - 1}{q - 1} = 0$$

$$K_0q^n - R \frac{q^n - 1}{q - 1} = 0$$

Bei der Abzinsung ist die nachschüssige Zahlungsweise gebräuchlich.

3.2.4 Kapitaltilgung

„Die Tilgungsrechnung beschäftigt sich mit der Rückzahlung von Krediten, Darlehen und Hypotheken.“[5] Dabei wird meist nicht auf einmal der komplette Betrag inklusiv der Zinsen zurückgezahlt, sondern in Teilbeträge aufgeteilt. Man spricht dabei von „Tilgungs- oder Amortisationsschuld“[5]. Dabei wird festgelegt nach wie vielen Zahlungsperioden die Schuld getilgt sein muss. Die Tilgung erfolgt im Normalfall nachschüssig, das heißt am Ende eines Jahres. „Die Beträge, die alljährlich zur Verzinsung und Tilgung des Kapitals verwendet werden, nennt man Annuitäten“[1, S.198]. Man unterscheidet zwischen den zwei grundlegenden Tilgungsarten, Ratentilgung und Annuitätentilgung.

a) Ratentilgung Von Ratentilgung spricht man, wenn alle Tilgungsraten T_k , die am Ende der k -ten Zahlungsperiode erhoben werden, konstant sind, $k = 1, 2, 3, \dots, n$.

Somit gilt für $T_1 = T_2 = T_3 = \dots = T_n = \boxed{T_k = \frac{K_0}{n}}$

Der Restbetrag der Schuld ergibt sich dann aus

$$K_k = K_0 - kT = K_0 - k \frac{K_0}{n} = K_0 \left(1 - \frac{k}{n}\right)$$

$$\boxed{K_k = K_0 \left(1 - \frac{k}{n}\right)}$$

Der zu entrichtende Zinssatz ergibt sich aus der Restschuld des Vorjahres (K_{k-1}):

$$Z_k = K_{k-1} \cdot p\%$$

$$\text{mit } K_{k-1} = K_0 - (k-1)T$$

$$\text{mit } T = \frac{K_0}{n}$$

$$\Rightarrow K_{k-1} = K_0 \left(\frac{1-k}{n} + 1\right)$$

$$Z_k = K_0 \left(\frac{1-k}{n} + 1\right) \cdot p\%$$

Demzufolge ergibt sich für die Annuität A :

$$\begin{aligned} A &= Z_k + T = K_0 p\% \left(1 + \frac{1-k}{n}\right) + \frac{K_0}{n} = \\ &= K_0 \left(p\% \left(1 + \frac{1-k}{n}\right) + \frac{1}{n}\right) = K_0 \left(\frac{np\% + p\% - kp\% + 1}{n}\right) \end{aligned}$$

$$\boxed{A = \frac{K_0}{n} [r(n+1-k) + 1]} \text{ mit } r = p\%$$

Beispiel 3.2.4.1:

Ein Grundstück im Wert von 200.000 Euro soll verkauft werden. Der Käufer will den Betrag in 5 Jahren bei einer Verzinsung von 8% jeweils zum Jahresende tilgen.

$$K_0 = 200000; r = p\% = 8\%; n = 5$$

$$T = \frac{K_0}{n} = \frac{200000}{5} = 40000$$

Jahr	Schuld	Annuität	Zins	Tilgung	Restschulden
1	200000	56000	16000	40000	160000
2	160000	52800	12800	40000	120000
3	120000	49600	9600	40000	80000
4	80000	46400	6400	40000	40000
5	40000	43200	3200	40000	0
gesamt:		248000	48000	200000	

b) Annuitätentilgung Man spricht von Annuitätentilgung, wenn pro Zahlungsperiode der gleiche Betrag zurückgezahlt wird. „Da jeweils nur die Restschuld zu verzinsen ist, werden die Zinsen immer geringer und die Tilgungsrate wächst dadurch um die ersparten Zinsen“ [3, S.110] ($A = Z + T$).

Die Tilgungsrate im ersten Jahr sei T_1 , fürs die darauffolgenden Jahre gilt demnach:

$$T_2 = T_1(1 + p\%) = T_1q$$

$$T_3 = T_2q = T_1q^2$$

$$T_m = T_1q^{m-1} \text{ mit } m = 1, 2, 3, \dots, n$$

T_m ist die Tilgungsrate am Ende des m-ten Jahres. Nach n Jahren gilt:

$$T_1 + T_2 + T_3 + \dots + T_n = K_0$$

$$T_1 + T_1q + T_1q^2 + \dots + T_1q^{n-1} = K_0$$

$$\boxed{K_0 = T_1 \frac{q^n - 1}{q - 1}} \quad (I)$$

Daraus folgt die Restschuld K_m nach m Jahren:

$$K_m = K_0 - \sum_{i=1}^m T_i = K_0 - \sum_{i=1}^m T_1 \cdot q^i$$

$$\boxed{K_m = K_0 - T_1 \frac{q^m - 1}{q - 1}} \quad (II)$$

Der Zins Z entspricht dem Produkt aus dem Restkapital und dem Zinsfaktor q :

$$Z_m = K_{m-1}q$$

Die Annuität folgt aus der Beziehung $A = Z_m + T_m$

Für $m = n + 1$ ist $Z_m = 0$:

$$Z_{n+1} = K_nq$$

$$\text{mit } K_n = K_0 - T_1 \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

$$\text{und } K_0 = T_1 \frac{q^n - 1}{q - 1} \quad (I)$$

$$\Rightarrow K_n = 0$$

$$\Rightarrow Z_{n+1} = 0$$

$$\Rightarrow A = T_{n+1} = T_1q^{n-1+1} = T_1q^n$$

$$\text{mit } K_0 = T_1 \frac{q^n - 1}{q - 1} \Rightarrow T_1 = K_0 \frac{q - 1}{q^n - 1}$$

$$\boxed{A = K_0q^n \frac{q - 1}{q^n - 1}}$$

Beispiel 3.2.4.2:

Ein Grundstück im Wert von 200.000 Euro soll verkauft werden. Der Käufer will den Betrag in 5 Jahren bei einer Verzinsung von 8% jeweils zum Jahresende tilgen.

$$K_0 = 200000; r = p\% = 8\%; n = 5$$

$$T = \frac{K_0}{n} = \frac{200000}{5} = 40000$$

Jahr	Schuld	Annuität	Zins	Tilgung	Restschulden
1	200000	50091,29	16000	34091,29	165908,71
2	165908,71	50091,29	13272,70	36818,59	129090,12
3	129090,12	50091,29	10327,21	39764,08	89326,04
4	89326,04	50091,29	7146,08	42945,21	46380,83
5	46380,83	50091,29	3710,46	46380,83	0
gesamt:		250456,45	50456,45	200000	

Die Ratentilgung ist für den Gläubiger nicht so lukrativ, da die Zinsen geringer ausfallen als bei der Annuitätentilgung. In den Beispielen 3.2.4.1 und 3.2.4.2 beträgt der Unterschied 2456,45 Euro.

c)Vergleich der Tilgungsarten Aus den Tilgungsplänen² ist deutlich ersichtlich, dass es den Gläubiger billiger kommt, einen Tilgungsplan über einen geringen Zeitraum aufzustellen. Dies ist auch logisch, da für jedes Jahr Zinsen und Zinseszinsen bezahlt werden müssen. Jetzt stellt sich die Frage, für welchen Zins und welches Kapital sich Raten- bzw. Annuitätentilgung mehr lohnt. Aus den Vergleichen mit den Tilgungsplänen im Anhang ergab sich folgendes:

- Wenn der Zinssatz gleich ist, steht auch der Unterschied der Zinshöhe im gleichen Verhältnis wie das abzuzinsende Kapital.

Beispiel 3.2.4.3: Anhang1 - Anhang2

ΔZ = Zinsunterschied zwischen Annuitäten- und Ratentilgung

$$\Delta Z_1 = 100,59 \text{ Euro}$$

$$\Delta Z_2 = 10058,96 \text{ Euro}$$

$$\Delta Z_2 = 100 \cdot \Delta Z_1 \text{ bei } K_2 = 100 \cdot K_1$$

- Bei unterschiedlichem Zinssatz, jedoch dem gleichen Kapitalbetrag ist das Verhältnis des Zinsunterschiedes zwischen Raten- und Annuitätentilgung nahezu dem Verhältnis der Zinssätze im Quadrat, unabhängig von der Höhe des abzuzinsenden Kapitals.

Beispiel 3.2.4.4: Anhang3 - Anhang4

ΔZ = Zinsunterschied zwischen Annuitäten- und Ratentilgung

$$\Delta Z_3 = 258,21 \text{ Euro}$$

$$\Delta Z_4 = 1005,81 \text{ Euro}$$

$$\Delta Z_3 = \frac{1}{4} \cdot \Delta Z_4 \text{ bei } q_3 = \frac{1}{2} \cdot q_4$$

Bei einem höheren Wert für K_0 ergibt sich das gleiche Verhältnis.

Wir sehen also, dass es sich in jedem Fall als Gläubiger lohnt die Tilgung nach kon-

²siehe Anhang

stanten Raten abzuleisten. Aber warum ist dem eigentlich so? Dazu schauen wir uns die Raten- bzw. Annuitätentilgung nochmal genauer an:

Bei der Ratentilgung wird jährlich ein konstanter Betrag getilgt. Somit wird jährlich der Zins einer konstant abfallenden Restschuld berechnet.

Bei der Annuitätentilgung herrscht nur ein langsamer Anstieg der Tilgungsbeträge, sodass man im Vergleich eine höhere Restschuld verzinsen muss, und das jährlich! Somit ist die Ratentilgung für den Gläubiger im Vergleich zur Annuitätentilgung billiger.

4 Schluss

Die Wirklichkeit zeigt z.B auf der Straße, dass ein Auto mit konstanter Geschwindigkeit ein langsames Auto überholen kann. Macht man sich jedoch weitere Gedanken dazu und kommt zu einem vergleichbarem Paradoxon wie der Philosoph Zenon mit „Achilles und der Schildkröte“, kann man glauben, dass die Mathematik nicht unbedingt die Wirklichkeit widerspiegelt. Mit den „Folgen und Reihen“ lässt sich dieses Paradoxon jedoch leicht lösen und deswegen sind diese ein wichtiger Bestandteil, der viele Probleme des Alltags lösen kann. Vor allem im Bereich der Zinsrechnung spielt er eine große Rolle, aber auch in der Biologie, z.B bei der Wachstumsforschung von Pflanzen oder ähnlichem. Im Allgemeinen ist es ein sehr interessantes Thema, das Anregungen zum Weiterdenken gibt.

5 Anhang

a1
Anlage

Tilgungspläne

$n = 10$ Jahre

$K_0 = 2000$ Euro

$q = 1,08$

Ratentilgung:

$T_k = 200$ Euro

Jahr	Schuld	Annuität	Zins	Tilgung	Restschuld
1	2000	360	160	200	1800
2	1800	344	144	200	1600
3	1600	328	128	200	1400
4	1400	312	112	200	1200
5	1200	296	96	200	1000
6	1000	280	80	200	800
7	800	264	64	200	600
8	600	248	48	200	400
9	400	232	32	200	200
10	200	216	16	200	0
Gesamt:		2880	880		

Annuitätentilgung:

$A = 298,06$ Euro

Jahr	Schuld	Annuität	Zins	Tilgung	Restschuld
1	2000	298,06	160	138,06	1861,94
2	1861,94	298,06	148,96	149,1	1712,84
3	1712,84	298,06	137,03	161,03	1551,81
4	1551,81	298,06	124,14	173,92	1377,89
5	1377,89	298,06	110,23	187,83	1190,06
6	1190,06	298,06	95,2	202,86	987,2
7	987,2	298,06	78,98	219,08	768,12
8	768,12	298,06	61,45	236,61	531,51
9	531,51	298,06	42,52	255,54	275,97
10	275,97	298,06	22,08	275,98	-0,01
Gesamt:		2980,6	980,59		

a1

a2
Anlage

Tilgungspläne

$n = 10$ Jahre

$K_0 = 200000$ Euro

$q = 1,08$

Ratentilgung:

$T_k = 20000$ Euro

Jahr	Schuld	Annuität	Zins	Tilgung	Restschuld
1	200000	36000	16000	20000	180000
2	180000	34400	14400	20000	160000
3	160000	32800	12800	20000	140000
4	140000	31200	11200	20000	120000
5	120000	29600	9600	20000	100000
6	100000	28000	8000	20000	80000
7	80000	26400	6400	20000	60000
8	60000	24800	4800	20000	40000
9	40000	23200	3200	20000	20000
10	20000	21600	1600	20000	0
Gesamt:		288000	88000		

Annuitätentilgung:

$A = 29805,90$ Euro

Jahr	Schuld	Annuität	Zins	Tilgung	Restschuld
1	200000	29805,9	16000	13805,9	186194,1
2	186194,1	29805,9	14895,53	14910,37	171283,73
3	171283,73	29805,9	13702,7	16103,2	155180,53
4	155180,53	29805,9	12414,44	17391,46	137789,07
5	137789,07	29805,9	11023,13	18782,77	119006,3
6	119006,3	29805,9	9520,5	20285,4	98720,9
7	98720,9	29805,9	7897,67	21908,23	76812,67
8	76812,67	29805,9	6145,01	23660,89	53151,78
9	53151,78	29805,9	4252,14	25553,76	27598,02
10	27598,02	29805,9	2207,84	27598,06	-0,04
Gesamt:		298059	98058,96		

a2

a3
Anlage

Tilgungspläne

$n = 10$ Jahre

$K_0 = 20000$ Euro

$q = 1,04$

Ratentilgung:

$T_k = 2000$ Euro

Jahr	Schuld	Annuität	Zins	Tilgung	Restschuld
1	20000	2800	800	2000	18000
2	18000	2720	720	2000	16000
3	16000	2640	640	2000	14000
4	14000	2560	560	2000	12000
5	12000	2480	480	2000	10000
6	10000	2400	400	2000	8000
7	8000	2320	320	2000	6000
8	6000	2240	240	2000	4000
9	4000	2160	160	2000	2000
10	2000	2080	80	2000	0
Gesamt:		24400	4400		

Annuitätentilgung:

$A = 2465,82$ Euro

Jahr	Schuld	Annuität	Zins	Tilgung	Restschuld
1	20000	2465,82	800	1665,82	18334,18
2	18334,18	2465,82	733,37	1732,45	16601,73
3	16601,73	2465,82	664,07	1801,75	14799,98
4	14799,98	2465,82	592	1873,82	12926,16
5	12926,16	2465,82	517,05	1948,77	10977,39
6	10977,39	2465,82	439,1	2026,72	8950,67
7	8950,67	2465,82	358,03	2107,79	6842,88
8	6842,88	2465,82	273,72	2192,1	4650,78
9	4650,78	2465,82	186,03	2279,79	2370,99
10	2370,99	2465,82	94,84	2370,98	0,01
Gesamt:		24658,2	4658,21		

Tilgungspläne

$n = 10$ Jahre

$K_0 = 20000$ Euro

$q = 1,08$

Ratentilgung:

$T_k = 2000$ Euro

Jahr	Schuld	Annuität	Zins	Tilgung	Restschuld
1	20000	3600	1600	2000	18000
2	18000	3440	1440	2000	16000
3	16000	3280	1280	2000	14000
4	14000	3120	1120	2000	12000
5	12000	2960	960	2000	10000
6	10000	2800	800	2000	8000
7	8000	2640	640	2000	6000
8	6000	2480	480	2000	4000
9	4000	2320	320	2000	2000
10	2000	2160	160	2000	0
Gesamt:		28800	8800		

Annuitätentilgung:

$A = 2980,59$ Euro

Jahr	Schuld	Annuität	Zins	Tilgung	Restschuld
1	20000	2980,59	1600	1380,59	18619,41
2	18619,41	2980,59	1489,55	1491,04	17128,37
3	17128,37	2980,59	1370,27	1610,32	15518,05
4	15518,05	2980,59	1241,44	1739,15	13778,9
5	13778,9	2980,59	1102,31	1878,28	11900,62
6	11900,62	2980,59	952,05	2028,54	9872,08
7	9872,08	2980,59	789,77	2190,82	7681,26
8	7681,26	2980,59	614,5	2366,09	5315,17
9	5315,17	2980,59	425,21	2555,38	2759,79
10	2759,79	2980,59	220,78	2759,81	-0,02
Gesamt:		29805,9	9805,88		

a5
Anlage

Tilgungspläne

$n = 10$ Jahre

$K_0 = 2000$ Euro

$q = 1,04$

Ratentilgung:

$T_k = 200$ Euro

Jahr	Schuld	Annuität	Zins	Tilgung	Restschuld
1	2000	280	80	200	1800
2	1800	272	72	200	1600
3	1600	264	64	200	1400
4	1400	256	56	200	1200
5	1200	248	48	200	1000
6	1000	240	40	200	800
7	800	232	32	200	600
8	600	224	24	200	400
9	400	216	16	200	200
10	200	208	8	200	0
Gesamt:		2440	440		

Annuitätentilgung:

$A = 246,58$ Euro

Jahr	Schuld	Annuität	Zins	Tilgung	Restschuld
1	2000	246,58	80	166,58	1833,42
2	1833,42	246,58	73,34	173,24	1660,18
3	1660,18	246,58	66,41	180,17	1480,01
4	1480,01	246,58	59,2	187,38	1292,63
5	1292,63	246,58	51,71	194,87	1097,76
6	1097,76	246,58	43,91	202,67	895,09
7	895,09	246,58	35,8	210,78	684,31
8	684,31	246,58	27,37	219,21	465,1
9	465,1	246,58	18,6	227,98	237,12
10	237,12	246,58	9,48	237,1	0,02
Gesamt:		2465,82	465,82		

a5

a6
Anlage

Tilgungspläne

$n = 10$ Jahre

$K_0 = 2000000$ Euro

$q = 1,03$

Ratentilgung:

$T_k = 200000$ Euro

Jahr	Schuld	Annuität	Zins	Tilgung	Restschuld
1	2000000	280000	80000	200000	1800000
2	1800000	272000	72000	200000	1600000
3	1600000	264000	64000	200000	1400000
4	1400000	256000	56000	200000	1200000
5	1200000	248000	48000	200000	1000000
6	1000000	240000	40000	200000	800000
7	800000	232000	32000	200000	600000
8	600000	224000	24000	200000	400000
9	400000	216000	16000	200000	200000
10	200000	208000	8000	200000	0
Gesamt:		2440000	440000		

Annuitätentilgung:

$A = 246581,89$ Euro

Jahr	Schuld	Annuität	Zins	Tilgung	Restschuld
1	2000000	246581,89	80000	166581,89	1833418,1
2	1833418,1	246581,89	73336,72	173245,17	1660172,9
3	1660172,9	246581,89	66406,92	180174,97	1479998
4	1479998	246581,89	59199,92	187381,97	1292616
5	1292616	246581,89	51704,64	194877,25	1097738,8
6	1097738,8	246581,89	43909,55	202672,34	895066,41
7	895066,41	246581,89	35802,66	210779,23	684287,18
8	684287,18	246581,89	27371,49	219210,4	465076,78
9	465076,78	246581,89	18603,07	227978,82	237097,96
10	237097,96	246581,89	9483,92	237097,97	-0,01
Gesamt:		2465818,9	465818,89		

a6

a7
Anlage

Tilgungspläne

$n = 10$ Jahre

$K_0 = 2000000$ Euro

$q = 1,08$

Ratentilgung:

$T_k = 200000$ Euro

Jahr	Schuld	Annuität	Zins	Tilgung	Restschuld
1	2000000	360000	160000	200000	1800000
2	1800000	344000	144000	200000	1600000
3	1600000	328000	128000	200000	1400000
4	1400000	312000	112000	200000	1200000
5	1200000	296000	96000	200000	1000000
6	1000000	280000	80000	200000	800000
7	800000	264000	64000	200000	600000
8	600000	248000	48000	200000	400000
9	400000	232000	32000	200000	200000
10	200000	216000	16000	200000	0
Gesamt:		2880000	880000		

Annuitätentilgung:

$A = 298058,98$ Euro

Jahr	Schuld	Annuität	Zins	Tilgung	Restschuld
1	2000000	298058,98	160000	138058,98	1861941
2	1861941	298058,98	148955,28	149103,7	1712837,3
3	1712837,3	298058,98	137026,99	161031,99	1551805,3
4	1551805,3	298058,98	124144,43	173914,55	1377890,8
5	1377890,8	298058,98	110231,26	187827,72	1190063,1
6	1190063,1	298058,98	95205,04	202853,94	987209,12
7	987209,12	298058,98	78976,73	219082,25	768126,87
8	768126,87	298058,98	61450,15	236608,83	531518,04
9	531518,04	298058,98	42521,44	255537,54	275980,5
10	275980,5	298058,98	22078,44	275980,54	-0,04
Gesamt:		2980589,8	980589,76		

a7

a10
Anlage

Tilgungspläne

$n = 5$ Jahre

$K_0 = 20000$ Euro

$q = 1,08$

Ratentilgung:

$T_k = 4000$ Euro

Jahr	Schuld	Annuität	Zins	Tilgung	Restschuld
1	20000	5600	1600	4000	16000
2	16000	5280	1280	4000	12000
3	12000	4960	960	4000	8000
4	8000	4640	640	4000	4000
5	4000	4320	320	4000	0
Gesamt:		24800	4800		

Annuitätentilgung:

$A = 5009,13$ Euro

Jahr	Schuld	Annuität	Zins	Tilgung	Restschuld
1	20000	5009,13	1600	3409,13	16590,87
2	16590,87	5009,13	1327,27	3681,86	12909,01
3	12909,01	5009,13	1032,72	3976,41	8932,6
4	8932,6	5009,13	714,61	4294,52	4638,08
5	4638,08	5009,13	371,05	4638,08	0
Gesamt:		25045,65	5045,65		

a10

a9
Anlage

Tilgungspläne

$n = 5$ Jahre

$K_0 = 20000$ Euro

$q = 1,04$

Ratentilgung:

$T_k = 4000$ Euro

Jahr	Schuld	Annuität	Zins	Tilgung	Restschuld
1	20000	4800	800	4000	16000
2	16000	4640	640	4000	12000
3	12000	4480	480	4000	8000
4	8000	4320	320	4000	4000
5	4000	4160	160	4000	0
Gesamt:		22400	2400		

Annuitätentilgung:

$A = 4492,54$ Euro

Jahr	Schuld	Annuität	Zins	Tilgung	Restschuld
1	20000	4492,54	800	3692,54	16307,46
2	16307,46	4492,54	652,3	3840,24	12467,22
3	12467,22	4492,54	498,69	3993,85	8473,37
4	8473,37	4492,54	338,93	4153,61	4319,76
5	4319,76	4492,54	172,79	4319,75	0,01
Gesamt:		22462,71	2462,71		

a9

a8
Anlage

Tilgungspläne

$n = 10$ Jahre $K_0 = 2000000$ Euro $q = 1,03$

Ratentilgung: $T_k = 200000$ Euro

Jahr	Schuld	Annuität	Zins	Tilgung	Restschuld
1	2000000	260000	60000	200000	1800000
2	1800000	254000	54000	200000	1600000
3	1600000	248000	48000	200000	1400000
4	1400000	242000	42000	200000	1200000
5	1200000	236000	36000	200000	1000000
6	1000000	230000	30000	200000	800000
7	800000	224000	24000	200000	600000
8	600000	218000	18000	200000	400000
9	400000	212000	12000	200000	200000
10	200000	206000	6000	200000	0
Gesamt:		2330000	330000		

Annuitätentilgung: $A = 234461,01$ Euro

Jahr	Schuld	Annuität	Zins	Tilgung	Restschuld
1	2000000	234461	60000	174461	1825539
2	1825539	234461	54766,17	179694,8	1645844
3	1645844	234461	49375,32	185085,7	1460758
4	1460758	234461	43822,75	190638,3	1270120
5	1270120	234461	38103,61	196357,4	1073763
6	1073763	234461	32212,88	202248,1	871514,7
7	871514,7	234461	26145,44	208315,6	663199,1
8	663199,1	234461	19895,97	214565	448634,1
9	448634,1	234461	13459,02	221002	227632,1
10	227632,1	234461	6828,96	227632,1	0,02
Gesamt:		2344610	344610,1		

a8

Literatur

- [1] Zwerger-Klug, Algebra-Lindauers Mathematisches Unterrichtswerk, München, J.Lindauer Verlag München, 1960¹⁴
- [2] Baierlein, Barth, Greifenegger, Krumbacher, Anschauliche Analysis 1, "o.O", Ehrenwirth Verlag GmbH München, „o.J¹²“
- [3] Precht, Voit, Kraft, Mathematik für Nichtmathematiker 2, "o.O", Oldenbourg Verlag, „o.J⁷“
- [4] <http://www.mat.univie.ac.at/schlosse/courses/EinfMA/Tutorium/Folgen%20und%20Reihen.pdf>, 21.09.2008
- [5] <http://www.matheraetsel.de/texte/FIN13.pdf>, 18.01.2009

Hiermit erkläre ich, dass ich die Facharbeit ohne fremde Hilfe angefertigt und nur die im Literaturverzeichnis angeführten Quellen und Hilfsmittel benützt habe.
Augsburg, den 23. Januar 2009